

Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2016 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 60 баллов.

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке $9876 - 54 - 321$ получается 9501.)

2. Существует ли четырёхугольник, который можно разрезать на три равных треугольника двумя разными способами? Если не существует — докажите, если существует — постройте пример.

Существует

3. Болельщики «Спартака» говорят правду, когда «Спартак» выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики «Динамо», «Зенита» и «Локомотива». После двух матчей с участием этих четырёх команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос «Болете ли вы за «Спартак»?» положительно ответили 200 человек, на вопрос «Болете ли вы за «Динамо»?» положительно ответили 300 человек, на вопрос «Болете ли вы за «Зенит»?» положительно ответили 500 человек, на вопрос «Болете ли вы за «Локомотив»?» положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?

0, 100, 200, 300

4. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде $20x^2 + 80xy + 95y^2$ для некоторых целых чисел x и y . Строго обоснуйте ответ.

15

5. На доске написаны числа $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/100$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них $a + b + ab$. После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?

100

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек «вверх», «вниз», «влево» и «вправо», причём две противоположенные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку «вверх», а если это запрещено (слово начинается с «вниз»), то убирает это первое «вниз»; ученики D , L , R делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку «вниз», «вправо», «влево». Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.