

Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2015 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 80 баллов.

1. Коля придумал себе развлечение: он переставляет цифры в числе 2015, после чего ставит между любыми двумя цифрами знак умножения. При этом ни один из получившихся двух сомножителей не должен начинаться с нуля. Затем он вычисляет значение этого выражения. Например: $150 \cdot 2 = 300$, или $10 \cdot 25 = 250$. Какое наибольшее число у него может получиться в результате такого вычисления?

0901

2. Числа x и y таковы, что $x + y = xy = 17$. Найти значение выражения

$$(x^2 - 17x) \left(y + \frac{17}{y} \right).$$

682-

3. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$. На сторонах AC , BC выбраны точки E и D соответственно такие, что $AE = EC$, $\angle ADB = \angle EDC$. Найти отношение $CD : BD$.

1 : 2

4. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты (Э) и доллары (\$). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\begin{array}{c} \text{Б} \xrightleftharpoons[\frac{1}{2}]{2} \text{К} \quad \text{Э} \xrightleftharpoons[\frac{1}{6}]{6} \text{Б} \quad \text{Э} \xrightleftharpoons[\frac{1}{11}]{11} \text{К} \quad \$ \xrightleftharpoons[\frac{1}{15}]{10} \text{К} \end{array}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftharpoons \text{Э}$ и $\$ \rightleftharpoons \text{Б}$ в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

Может

5. Одна сторона прямоугольника в 5 раз длиннее другой. Покажите, как разрезать этот прямоугольник на 4 части и сложить из них квадрат. Части можно переворачивать и поворачивать, но нельзя накладывать друг на друга, и внутри квадрата не должно быть непокрытых участков.

6. Найти все натуральные числа n , такие, что число $n^2 + 77n$ является точным квадратом натурального числа.

4, 99, 175, 1444