

Олимпиада «Высшая проба» по математике

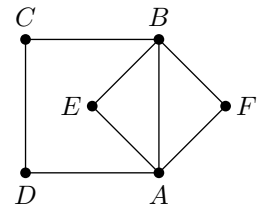
9 класс, 2014 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 60 баллов.

1. Известно, что ни одно из чисел a , b , c не является целым. Может ли случиться так, что каждое из чисел ab , bc , ca , abc — целое?

2. Точка B является серединой отрезка AC . Квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник BCF расположены в одной полуплоскости от прямой AC . Найти (в градусах) величину острого угла между прямыми CD и AF .

3. Двое играют в такую игру. На рисунке в точке A стоит фишка. Они ходят фишкой по очереди, с каждым ходом передвигая фишку из точки, в которой она стоит, в одну из названных на рисунке точек, соединённую с ней отрезком. Два раза по одному отрезку ходить нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон? Обоснуйте свой ответ.



4. Прямые, содержащие высоты неравностороннего треугольника ABC , пересекаются в точке H . I — центр вписанной окружности треугольника ABC , O — центр описанной окружности треугольника BHC . Известно, что точка I лежит на отрезке OA . Найдите угол BAC .

5. Клетки шахматной доски раскрашиваются в три цвета — белый, серый и чёрный — таким образом, чтобы соседние клетки, имеющие общую сторону, отличались цветом, однако резкая смена цвета (то есть соседство белой и чёрной клеток) запрещена. Найдите число таких раскрасок шахматной доски (раскраски, совпадающие при повороте доски на 90 и 180 градусов, считаются разными).

6. Последовательность a_n строится следующим образом: a_1, a_2 — произвольные действительные числа, при $n \geq 3$ число a_n равно наименьшему из чисел $|a_i - a_j|$, $1 \leq i < j \leq n-1$. Например, если $a_1 = 6$, $a_2 = \frac{19}{2}$, то получаем последовательность $6, \frac{19}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$. При некотором выборе a_1, a_2 получилась последовательность, в которой $a_{10} = 1$. Найдите наименьшее возможное значение a_3 в такой последовательности.

Ответы

1. Да.
2. 75° .
3. Второй.
4. 60° .
5. 2^{33} .
6. 21.