

## Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2014 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 45 баллов.

1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением  $x = y^2$ . Окружность радиуса 5 с центром в точке  $(11, 1)$  пересекает это множество в точках  $A, B, C$  и  $D$ . Докажите, что все точки  $A, B, C, D$  лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , и найдите уравнение этой параболы.

2. Через вершины правильного шестиугольника проведены шесть различных параллельных прямых. Может ли оказаться так, что все попарные расстояния между этими прямыми являются целыми числами?

3. Последовательность  $a_n$  строится следующим образом:  $a_1, a_2$  — произвольные действительные числа, при  $n \geq 3$  число  $a_n$  равно наименьшему из чисел  $|a_i - a_j|$ ,  $1 \leq i < j \leq n-1$ . Например, если  $a_1 = 6$ ,  $a_2 = \frac{19}{2}$ , то получаем последовательность  $6, \frac{19}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1, 1, 0, 0, 0, \dots$ . При некотором выборе  $a_1, a_2$  получилась последовательность, в которой  $a_{10} = 1$ . Найдите наименьшее возможное значение  $a_3$  в такой последовательности.

4. Многогранник вписан в сферу радиуса  $R$ , а его объём численно равен площади его поверхности.

а) Докажите, что  $R > 3$ .

б) Может ли  $R$  быть больше 1000?

5. Пусть  $p > 2$  — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \dots < a_k < \frac{p}{2}$$

и произведение

$$\frac{p - a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p - a_2}{|a_2|} \cdot \dots \cdot \frac{p - a_k}{|a_k|}$$

равно  $3^m$  для некоторого натурального  $m$ .

6. На клетчатой доске размером  $2 \times n$  клеток некоторые клетки закрашиваются в чёрный цвет. Раскраска называется правильной, если среди закрашенных нет двух соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). Раскраска, в которой ни одна клетка не закрашена, тоже считается правильной.

Пусть  $A_n$  — количество правильных раскрасок с чётным числом закрашенных клеток,  $B_n$  — количество правильных раскрасок с нечётным числом закрашенных клеток. Найдите все возможные значения  $A_n - B_n$ .

## Ответы

1.  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$ .

2. Да.

3. 21.

4. б) Да.

5.

6.  $\pm 1$ .