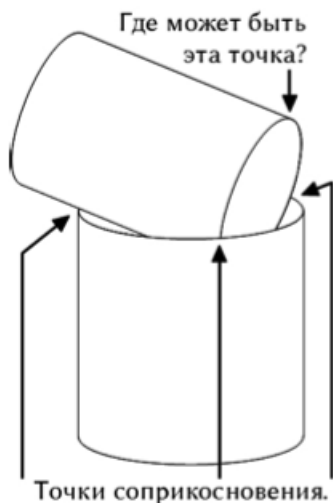


Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2013 год

Все задачи, кроме третьей, оценивались в 17 баллов; третья задача — 15 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 33 баллов.

1. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$ и докажите, что других нет.
2. Триномом степени p называется функция вида $f(x) = x^p + ax^q + 1$, где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все пары триномов, которые дают в произведении трином степени 15.
3. Улитка, имеющая постоянную скорость 40 см/ч, начала ползти по цилиндрической колонне из точки A . Каждые 15 минут она поворачивала поочерёдно то влево, то вправо на 90° , а всё остальное время ползла прямо. (Углы и длины измеряются на плоской развёртке колонны.) Через 1 час 45 минут после начала путешествия улитка заметила, что снова оказалась в точке A , а через 12,5 часов после начала путешествия захотела вернуться в точку A по кратчайшему пути, уже никуда не сворачивая. Какое расстояние ей придётся проползти?
4. Вместо крестиков в выражении $\times \cdot \times + \times \cdot \times + \dots + \times \cdot \times$ (50 слагаемых) расставили числа $1, \dots, 100$, каждое по одному разу. Какое максимальное и минимальное значение может иметь полученное выражение?
5. Пусть x, y и z — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-y)^2} + \sqrt{1+(y-z)^2} + \sqrt{1+(3-z)^2}$? Обоснуйте свой ответ.
6. Даны два высоких цилиндрических стакана радиусов r и $R, r < R$. Широкий поставили на горизонтальный стол, а узкий всевозможными способами помещают на него так, что он опирается на кромку широкого двумя точками своей кромки и одной точкой боковой поверхности (см. рисунок). Опишите геометрическое место точек пространства, в которых при этом может оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.



Ответы

1. $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(-2, 3)$, $(-6, 9)$.

2. $(1 + x^5)(1 - x^5 + x^{10})$, $(1 - x^3 + x^9)(1 + x^3 + x^6)$, $(1 - x^6 + x^9)(1 + x^3 + x^6)$.

3. 50 см.

4. 169150 и 85850.

5. 5.

6. ГМТ — боковая поверхность цилиндра, у которого ось и радиус те же, что у нижнего стакана, нижнее основание совпадает с кромкой нижнего стакана, а верхнее основание на $2r$ выше нижнего.