

Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2013 год

Все задачи, кроме второй, оценивались в 17 баллов; вторая задача — 15 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 28 баллов.

1. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.
2. Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося; один — с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой — с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?
3. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 1, у которого биссектриса, медиана и заключённый между ними отрезок противоположной стороны также образуют равнобедренный треугольник.
4. Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) тупоугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 33? Обоснуйте свой ответ.
5. Пусть x , y и z — произвольные вещественные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2+(x-y)^2} + \sqrt{2+(y-z)^2} + \sqrt{2+(2-z)^2}$? Обоснуйте свой ответ.
6. Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделённая бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Борозки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдаёт их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает её, а другую ломает по бороздке и отдаёт получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдаёт, и всё повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?

Ответы

1. $(2, 0)$, $(2, -1)$, $(6, -4)$, $(4, 0)$, $(12, -8)$.

2. 65.

3. 4.

4. 16.

5. 6.

6. Максимальная степень двойки, на которую делится M , не равна максимальной степени двойки, на которую делится N .