

## Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2012 год

*Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 30 баллов.*

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел  $a$  и  $b$ , такие, что  $a^2 + 2b^2$  делится на  $a + 2b$ .
2. На плоскости отметили девять точек. Из каждой из них выпустили три луча, образующие друг с другом тупые углы и не проходящие через другие точки. На какое минимальное число частей получившиеся 27 лучей могут разбить плоскость?
3. Сколько точек, обе координаты которых натуральны, лежит строго внутри области, ограниченной осями координат и графиком функции  $y = -x^3 + 30x^2 - 300,6x + 2012$ ?
4. Каждая из четырёх окружностей касается трёх сторон заданного параллелограмма с отношением сторон  $2 : 3$  и площадью 1. Найдите площадь четырёхугольника, образованного центрами этих окружностей.
5. Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 2$$

больше  $1/14$ .

6. Существует ли набор выпуклых четырёхугольников, который является набором всех граней как двух выпуклых многогранников, так и одного?

## Ответы

1.  $(1, 1)$  и  $(4, 1)$ .

2. 33.

3. 19103.

4.  $1/12$ .

5.

6. Да.