

# Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2011 год

*В 2011 году олимпиада называлась Межрегиональной олимпиадой ГУ-ВШЭ.*

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$ .
2. Существует ли квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  такой, что  $f(0) = 2011$ ,  $f(2011) = 0$ , а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е.  $f(2^n)$  делится на 3 при каждом натуральном  $n$ .)
3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.
4. Центры трёх шаров с радиусами 1, 2, 3 образуют правильный треугольник со стороной 100500. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольников  $ABC$  таких, что точка  $A$  лежит в первом шаре, точка  $B$  — во втором шаре, а точка  $C$  — в третьем шаре.
5. Натуральные числа  $p$  и  $q$  таковы, что  $\frac{p}{q} < \sqrt{17}$ . Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{17}?$$

6. Класс из 20 учеников разделён на две половины так, что каждый школьник из первой половины дружит ровно с шестью одноклассниками, а каждый школьник из второй половины дружит ровно с четырьмя одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

## Ответы

1.  $\cos(\cos 1)$  и  $\cos 1$ .
2. Существует.
- 3.
4. Шар радиуса 2 с центром в центре данного правильного треугольника.
5. Всегда верно.
6. 450.