

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

9 класс, 2013 год

1. Решите систему:

$$\begin{cases} x(1+x^2)(1+x^4) + y(1+y^2)(1+y^4) = 0, \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

2. Натуральные числа m и n , $m \neq n$, таковы, что число 2013^m имеет такие же две последние цифры, как и 2013^n .а) Приведите пример таких чисел m и n .б) Выясните, какое наименьшее значение может принимать величина $m + n$.3. Вокруг равнобедренного треугольника ABC с основанием $BC = a$ и высотой $AH = h$ описана окружность ω_1 . В угол BAC вписана окружность ω_2 , касающаяся окружности ω_1 изнутри и касающаяся сторон угла в точках P и Q . Определите, в каком отношении отрезок PQ делит высоту AH .4. Из пункта A в пункт B ровно в полдень выехал велосипедист; одновременно с ним из B в A выехал автомобиль. Спустя некоторое время из пункта A вслед за велосипедистом выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста в тот момент, когда последний встретился с автомобилем. По прибытии в A автомобиль немедленно развернулся и проследовал в пункт B , куда и прибыл одновременно с мотоциклистом, но на 50 мин раньше велосипедиста. Определите, в какой момент времени мотоциклист выехал из пункта A , если известно, что это произошло за 1 ч 20 мин до прибытия туда автомобиля.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + (x+y)^2$$

при условии, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

6. Даны n различных составных натуральных чисел a_1, \dots, a_n , принадлежащих интервалу $(1; 2013)$. Известно, что для любых двух различных чисел a_i, a_j из этого набора выполнено условие $\text{НОД}(a_i, a_j) = 1$.а) Приведите пример такого набора для $n = 14$.

б) Докажите, что не существует такого набора, содержащего 15 чисел.

7. Найдите a и b такие, что многочлен $x^{2013} + x^{99} + ax + b$ делится нацело на $x^2 - x + 1$.

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-3)^2 + (b-3)^2} + 2\sqrt{(a-3)^2 + (b+1)^2} + 2\sqrt{((a+1)^2 + (b-3)^2)}.$$

Ответы

1. $(10\sqrt{10}, -10\sqrt{10}), (-10\sqrt{10}, 10\sqrt{10})$.

2. а) 1 и 21; б) 22.

3. $a : \sqrt{a^2 + 4h^2}$.

4. В 12 часов 20 минут.

5. $-5,25$.

6. *Указание:* начните с 2^2 .

7. $a = 0, b = 2$.

8. $11\sqrt{2}$.