

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

7–9 классы, 2012 год

1. После того как пешеход прошёл половину пути и 1 км, ему осталось пройти $1/3$ пути и 1 км. Чему равен весь путь?

км 21

2. Водитель машины заметил, что одометр (счётчик пройденного расстояния) показывает симметричное число (т. е. число, которое одинаково читается слева направо и справа налево) 15951. Ровно через час одометр показал другое симметричное число. С какой скоростью ехала машина, если в течение всего этого часа она ехала с постоянной скоростью?

км/ч 011

3. Найдите количество натуральных чисел, которые делятся на 2012 и имеют, не считая единицы и самого этого числа, ровно 2199 различных делителей.

2

4. Квадратное табло состоит из 2012×2012 ячеек, каждая из которых может светиться или быть погашена. Известно, что можно переключать состояние на противоположное одновременно для всех ячеек на любой горизонтали, на любой вертикали и на любой (не обязательно большой) диагонали. Гарантировано ли (независимо от того, какие ячейки в начальный момент светились, а какие были погашены) такими переключениями можно перевести табло в состояние, когда все ячейки погашены?

Нет

5. Нано-лягушка, перемещаясь по плоскости, может делать два вида действий: прыгать в направлении взгляда ровно на 1 метр и изменять направление взгляда на угол, кратный 45 градусам.

а) Докажите, что таким образом нано-лягушка может приблизиться к любой точке плоскости на расстояние, не превосходящее 1 нанометра.

б) Может ли нано-лягушка, перемещаясь таким образом, удалиться от точки, в которой она первоначально находилась, ровно на 2,5 метра?

Да (е) 11 (е)

6. Треугольники $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_{2012}B_{2012}C_{2012}$ таковы, что вершинами треугольника $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ являются точки касания сторон треугольника $A_nB_nC_n$ и вписанной в этот треугольник окружности ($n = 1, 2, \dots, 2011$). Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что наибольший угол этого треугольника равен одному из углов треугольника $A_{2012}B_{2012}C_{2012}$.

09 ° 09 ° 09

7. Петя и Коля играют в такую игру. Петя загадывает натуральное число от 1 до 2012. Коля называет натуральные числа, и после каждого названного числа Петя говорит «недобор», если названное число меньше загаданного, и «перебор», если названное число больше загаданного. Если названное число совпадает с загаданным, то Петя говорит «угадал» и игра заканчивается победой Коли. При этом если в процессе отгадывания дважды возник «перебор», то игра заканчивается победой Пети.

- а) Сможет ли Коля гарантированно выиграть, назвав не более 100 чисел?
- б) Найдите наименьшее N такое, что Коля гарантированно сможет выиграть, назвав не более N натуральных чисел.

89 (9 :aГ (e

8. Можно ли сложить прямоугольный лист бумаги, согнув его несколько раз, и сделать один прямолинейный разрез так, что после разворачивания отрезанная часть превратится

- а) в правильный треугольник;
- б) в равнобедренный треугольник с заданным углом при основании;
- в) в треугольник с заданными углами?

eГ (a :eГ (g :aГ (e