

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2018 год, Челябинск

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geq \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причём процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в отношении $1 : 2 : 3$, то получится 10% морс, а если в пропорции $5 : 4 : 3$, то получится 25% морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трёх растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

3. Найдите площадь треугольника ABC , в котором $AB = 4$, $AC = 5$ и $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{11}{16}$.

4. Для функции $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018).$$

5. Найдите наименьшее значение $|x - y|$ при условии

$$(\cos^4 x + 1)(4 \cos^4 y + 1) = 8 \cos^3 x \cos^2 y, \quad x \in [\pi; 2\pi], \quad y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$