Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2015 год, Уфа

1. Решите уравнение

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+\ldots+x^{10}\right)=\left(1+x+x^2+\ldots+x^6\right)^2.$$

$-1;\ 0$

2. Две арифметические прогрессии содержат по 2015 членов каждая. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй равно 2. Найдите отношение разностей этих прогрессий и приведите пример таких прогрессий.

26

3. Решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\pi(x-y)+\operatorname{ctg}^2\pi(x-y)=\sqrt{\dfrac{2x}{x^2+1}}+1, \\ x^2+y^2\leqslant 10. \end{cases}$$

$(1;\ \frac{2n+5}{4})$, $n=-8;-7;\ldots;3$

4. Плоскость проходит через точку K, лежащую на ребре SA пирамиды $SABC$, и делит биссектрису SD грани SAB и медиану SE грани SAC пополам. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды, если $SK:KA=SA:SB=2$?

$\frac{116}{19}$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$25^{-|x-a|}\log_{\sqrt[5]{7}}(x^2-2x+3)+5^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{7}}(2|x-a|+2)=0$$

имеет ровно три различных решения.

$\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$