

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2010 год, Уфа

1. Петя и Вася выходят одновременно из пункта A и идут в пункт B : Петя по шоссе, а Вася по тропинке. Найти расстояние между A и B по шоссе, если путь по тропинке короче пути по шоссе на 5 км, скорость движения Васи 3 км/ч, а скорость Пети — натуральное число и он приходит в B на один час позже Васи.

[4]

2. Решите уравнение

$$\sqrt{25 \sin x + 24} + 2\sqrt{3} \cos x = 0.$$

[2]

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{16}} x \geq -2^{-x}.$$

[2]

4. Решите уравнение $f(\sqrt{x+4}) = f(2x)$, где $f(t) = 2t - t^2$ при всех действительных t .

[0]

5. Через точки L, M, N , лежащие соответственно на рёбрах AB, AC, AD правильного тетраэдра $ABCD$, проведена плоскость. Известно, что рёбра тетраэдра равны 1, объём пирамиды $ALMN$ равен $\sqrt{2}/48$ и $AL = 1/3$. Какие значения может принимать длина отрезка MN ?

[4]

6. Какие из значений 8, 43, 2010 может принимать N , если известно, что уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

имеет единственное решение в натуральных числах x и y ?

[4]