Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2010 год, Москва

1. У Маши есть два разных стакана цилиндрической формы. Она заметила, что пакет муки можно так высыпать в эти стаканы, что уровень муки в первом стакане составит 12 см, а во втором — 10 см, или так, что уровень муки в первом стакане составит 9 см, а во втором — 12 см. На каком уровне окажется мука в каждом из этих стаканов, если муку из пакета высыпать в стаканы поровну?

13,5 см и 9 см

2. Сколько различных решений на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет уравнение

$$6\sqrt{2}\cos x \operatorname{ctg} x - 2\sqrt{2}\operatorname{ctg} x + 3\cos x - 1 = 0\,?$$

Найдите эти решения.

2 решения; $\pm\arccos\frac{1}{3}$

3. Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 3 от этих чисел равна 10. Найдите эти числа, если $\log_3 b_1 \cdot \log_3 b_5 = 3$.

$3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ 9\sqrt{3},\ 27$

4. Окружность с центром в точке O, лежащей на стороне AB треугольника ABC, проходит через точку A, пересекает сторону AC в точке K, а сторону BC — в точках L и M. Известно, что $KC = CL = MB = 2$, $AK = 3$. Найдите отношение длин отрезков AO и OB.

$5:7$

5. Найдите все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a+b)x^2 + (3b - 4a + 7)x + 4a - 2b - 6 \geqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

$a \geqslant 1$

6. Через точки M, N, K, L, лежащие соответственно на рёбрах SA, SB, SC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3 \cdot SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN.

16