

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2013 год, Москва

1. Решить неравенство: $3 + 2 \cdot 4^{\log_x 7} - 2^{\log_{\sqrt{x}} 49} \geq 0$.

2. Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

3. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2, \end{cases}$$

максимальна?

4. Найти наибольшее значение выражения

$$2 \arccos(\sin(x - 2y - 1)) + x - y + 2$$

при $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

5. Гора имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды с основанием $ABCD$ и вершиной S , причём длина ребра основания равна 13 км, а боковые грани наклонены к основанию под углом β ($\cos \beta = 0,6$). Скорость туриста на ровной поверхности составляет 4 км/ч, а при подъёме или спуске под углом α к горизонту равна $4 \cos^2 \alpha$ км/ч. Может ли турист, находящийся в точке A , успеть на автобус, отходящий ровно через 6 часов 15 минут из точки C , если в середине пути он обязательно делает 9-минутную остановку?

6. В один прекрасный день Цветочный город был взбудоражен известием: кто-то выпил все запасы арбузного сока! В ходе разбирательства выяснилось, что виновен либо Пончик, либо Сиропчик (но не оба), но коротышки никак не могли решить, кто именно из двоих.

- Сок выпил Пончик, — заявила Кнопочка.
 - А однажды он целую ракету украл, — поддержала её Звёздочка.
 - Сиропчик никогда ничего не крад, — сказал Растеряйка.
 - А ты, Растеряйка, каждый день теряешь вещи! — заявила Мушка.
 - Звёздочка и Растеряйка говорят правду, — сказал Гунька.
 - Звёздочка и Мушка говорят правду, — утверждал Торопыжка.
 - Либо Растеряйка, либо Мушка говорят правду, а может они оба правы, — высказал своё мнение Авоська.
 - Либо Гунька, либо Торопыжка, либо они оба говорят правду, — сказал Небоська.
 - Звёздочка и Авоська говорят правду, — считал Пачкуля Пёстренький.
 - Небоська говорит правду, а Пёстренький врёт, — утверждал Незнайка.
 - Я ничего не могу понять! — закричал Цветик. — Во всех этих словах нет никакого смысла!
 - И всё-таки кое-какие выводы из этих слов можно сделать, — возразил Знайка. — Я точно знаю, что либо и Незнайка, и Кнопочка правы, либо оба ошибаются.
- Кто же выпил арбузный сок, если известно, что Знайка всегда говорит правду и никогда не ошибается?

Ответы

1. $(0; 1) \cup [7^{\log_3 4}; +\infty)$.

2. $x = -1, y = \frac{1}{2}$.

3. $|a| \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. $2\pi + 3$.

5. Может.

6. Сиропчик.