

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике**10–11 классы, 2012 год, Уфа**

1. В школе было три урока. Но только 4 школьника были на всех уроках. Каждый из остальных «учеников» присутствовал только на двух уроках, а один из уроков прогулял. На математике в классе было 17 школьников, на физике — 18, на русском — 19. Сколько школьников присутствовало и на математике, и на физике (не имеет значения, удостоили ли они своим посещением урок русского языка)?

2. В желобе, имеющем форму двугранного угла величины $2 \arcsin \frac{1}{3}$, неподвижно лежит шар радиуса 3, касаясь при этом обеих граней. Другой шар скользит вдоль желоба, также постоянно касаясь каждой из граней, и проскальзывает мимо неподвижно лежащего шара, не сталкиваясь с ним и даже не касаясь его. Найдите все возможные значения радиуса скользящего шара.

3. Решите уравнение

$$x - \sqrt{x} \cdot 2^{-x^6} = 2^{1-2x^6}.$$

4. Окружность, проходящая через вершины A и B квадрата $ABCD$, пересекает прямые AD и AC в точках E и F , отличных от точки A . Длина ортогональной проекции отрезка EF на прямую AC равна 1. Какой при этих условиях может быть длина стороны квадрата?

5. Решите систему

$$\begin{cases} 4 \cos^2 x + \cos^2 5y = 4 \cos x \cos^6 5y, \\ \lg(x - y)^2 < 2 \lg(2\pi) - \lg 5 - \lg 45. \end{cases}$$

Ответы

1. 10.

2. $(0; \frac{3}{2}) \cup (6; +\infty)$.

3. 1.

4. $\sqrt{2}$.

5. $(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{5} + 2\pi k), (-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.