

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2012 год, Москва

1. Лаборатория Альфа на покупку пяти микроскопов, четырёх телескопов и эпидиаскопа потратила 140 тыс. руб. Лаборатория Бета на покупку шести микроскопов, пяти телескопов и эпидиаскопа потратила 167 тыс. руб. Сколько потратит лаборатория Гамма на покупку трёх микроскопов, двух телескопов и эпидиаскопа, если известно, что цены у всех поставщиков одинаковы?

2. Решите неравенство

$$\arccos(4x^2 - 8x + 3) + 2 \arcsin(x - 1) < 0.$$

3. Координаты точки удовлетворяют соотношению $xy + yz + zx = 4$. На каком расстоянии от плоскости $z = -3$ может лежать эта точка, если известно, что расстояние от этой точки до начала координат равно двум?

4. Найдите координаты общих точек графиков функций

$$f(x) = \left| 5x^2 + 6x - \frac{2}{x} \right| + \left| 3x^2 - 2\sqrt{x} - 9 - \frac{5}{x} \right| \quad \text{и} \quad g(x) = 2x^2 + 2\sqrt{x} + 21 - \frac{3}{x}.$$

5. Последовательность выпуклых четырёхугольников

$$P_1Q_1R_1S_1, \quad P_2Q_2R_2S_2, \quad \dots, \quad P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$$

такова, что вершины четырёхугольника $P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}S_{n+1}$ являются серединами сторон четырёхугольника $P_nQ_nR_nS_n$ ($n = 1, 2, \dots, 2011$).

а) Может ли отношение периметров четырёхугольников $P_{2012}Q_{2012}R_{2012}S_{2012}$ и $P_1Q_1R_1S_1$ равняться $32 \cdot 10^{-303}$?

б) Найдите все возможные значения этого отношения.

Ответы

1. 86 тыс. руб.

2. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. $\frac{9\pm 2\sqrt{3}}{3}$.

4. (1, 22).

5. а) Нет; б) $(2^{-1006}; 2^{-1005})$.