

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2012 год, Брянск

1. На путь в гору по маршруту A турист затратил 2 часа, а на путь с горы по маршруту B , который на 18 км длиннее маршрута A , — 4 часа. Найдите общую длину пути, пройденного туристом, если каждый километр при спуске турист проходил на 10 минут быстрее, чем при подъёме.

2. В окружности диаметр AB и хорда PQ пересекаются в точке C под прямым углом. Найдите длины биссектрис треугольника APQ , если $PC = 5$, $AC : CB = 8$.

3. Найдите суммарную длину отрезков, составляющих решение неравенства

$$|2 \sin x + 3 \cos x| + |\sin x - 3 \cos x| \leq 3 \sin x$$

на отрезке $[0; 4\pi]$.

4. Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

5. Найдите все положительные значения параметра a , при которых среди чисел последовательности

$$x_n = -n^2 + 10n + 22 + \frac{10}{|5n - 31| + a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

есть ровно два максимальных элемента.

Ответы

1. 30 км.

2. $10\sqrt{2}$, $4\sqrt{6}$, $4\sqrt{6}$.

3. $2 \operatorname{arctg} \frac{9}{7}$.

4. Одна точка с абсциссой $\frac{1}{2-\sqrt[3]{7}} = 4 + 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{49}$.

5. 4.