

Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2017 год

Задача 1. Представьте в виде несократимой дроби:

$$\frac{12 + 15}{18} + \frac{21 + 24}{27} + \dots + \frac{48 + 51}{54}.$$

$\frac{30}{17}$

Задача 2. Андрей, Максим, Игорь и Коля соревновались в велогонке. На вопрос, кто какое место занял, они ответили:

Андрей: — Я не был ни первым, ни последним.

Максим: — Я не был последним.

Игорь: — Я был первым.

Коля: — Я был последним.

Известно, что три мальчика ответили честно и только один соврал. Кто из мальчиков соврал?

Игорь

Задача 3. Про натуральные числа x и y и целое нечётное число z известно, что

$$x! + y! = 24z + 2017.$$

Найдите все возможные такие тройки чисел (x, y, z) .

$(1, 4, -83); (4, 1, -83); (1, 5, -79); (5, 1, -79)$

Задача 4. Пусть L — точка пересечения диагоналей CE и DF правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 3. Точка K такова, что $\vec{LK} = 3\vec{AB} - \vec{AC}$. Определите, лежит ли точка K внутри, на границе или вне $ABCDEF$, а также найдите длину отрезка KC .

Вне; $\sqrt{3}$

Задача 5. Решите в действительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0, \\ y + z + 2 - 4yz = 0, \\ z + x + 2 - 4zx = 0. \end{cases}$$

$(1, 1, 1); (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Задача 6. Сравните числа $\frac{\sin 2016^\circ}{\sin 2017^\circ}$ и $\frac{\sin 2018^\circ}{\sin 2019^\circ}$.

Второе больше

Задача 7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) боковая сторона равна 20 см, угол BAC равен 45° . Пусть O — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$. Оказалось, что прямые OD и AB перпендикулярны. Найдите длину основания AD трапеции.

100 (2^9 + 9^9) 01

Задача 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^{|x-a|} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 4) + 2^{x^2-2x} \log_{\sqrt{3}}(2|x-a| + 3) = 0$$

имеет ровно три решения?

$\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}$

Задача 9. В первенстве по футболу участвует 20 команд, которые играют по разу друг с другом. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трёх команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

06

Задача 10. В треугольной пирамиде $ABCD$ с основанием ABC боковые рёбра попарно перпендикулярны, $DA = DB = 2$, $DC = 5$. Из точки основания испускают луч света. Отразившись ровно по одному разу от каждой боковой грани (от рёбер луч не отражается), луч попадает в точку на основании пирамиды. Какое наименьшее расстояние мог пройти луч?

$\frac{6}{9^{01}}$