

# Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

9–10 классы, 2015 год

**Задача 1.** Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

72

**Задача 2.** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. А, В и С — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. А и В сказали следующее. А: «В по рангу выше, чем С». В: «С по рангу выше, чем А». Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу — А или В?»

8

**Задача 3.** Четырёхзначное число  $X$  не кратно 10. Сумма числа  $X$  и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна  $N$ . Оказалось, что число  $N$  делится на 100. Найдите  $N$ .

00011

**Задача 4.** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 65 и 31 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BC}$ .

2015

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10, \\ 10x^2 + 18xy + 8y^2 = 6. \end{cases}$$

(-1; 2), (1; -2), (1; 1), (-1; 1), (-1; 1), (1; 1)

**Задача 6.** Будем обозначать  $f^{(n)}(x)$  последовательное применение  $n$  раз функции  $f$  (например,  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$  и т. д.). Даны функции  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  и  $h(x) = \frac{x+1}{x}$ . Найдите значение выражения  $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$ .

1

**Задача 7.** Прямая  $s$  задается уравнением  $y = x + 1$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(1, 0)$  и  $B(3, 0)$ . На прямой  $s$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

(2; 1)

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = \sqrt{a}(x^2 + y^2) + \sqrt{13 - a}(x + y) - \sqrt{13a - a^2}$$

имеет ровно четыре решения в целых числах?

21

**Задача 9.** В турнире по мини-футболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду, и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 8, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

27

**Задача 10.** Прямоугольник  $P$  разбит прямыми, параллельными его сторонам, на девять маленьких прямоугольников. Про какое наименьшее количество маленьких прямоугольников достаточно узнать площади, чтобы можно было однозначно определить площадь прямоугольника  $P$ ?

2