

# Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2015 год

**Задача 1.** Сумма первых тринадцати членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних тринадцати членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 6 : 5. Найдите количество членов этой прогрессии.

12

**Задача 2.** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова А и В сказали следующее. А: «В — рыцарь». В: «А — не рыцарь». Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

**Задача 3.** Если из четырёхзначного числа  $X$  вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число  $N = K^2$ , причём  $K$  — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число  $N$ .

2025

**Задача 4.** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 155 и 13 соответственно, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$ .

107-

**Задача 5.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 14xy + 10y^2 = 17, \\ 4x^2 - 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

(2-11-)(211)(21)(2-1-)

**Задача 6.** Для  $x = \frac{\pi}{2n}$  найдите значение суммы

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$$

$\frac{2}{1+n}$

**Задача 7.** Прямая  $c$  задается уравнением  $y = 2x$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(2, 2)$  и  $B(6, 2)$ . На прямой  $c$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

(4,4)

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$$

имеет единственный корень?

$\frac{1}{9 \ln 1 + 1}$

**Задача 9.** В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 2 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду, и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 4, на третью — 1 : 5, на четвертую — 1 : 6. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

Да

**Задача 10.** В конус вписан цилиндр объёма 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объёмом 91. Найдите объём исходного конуса.

94,5