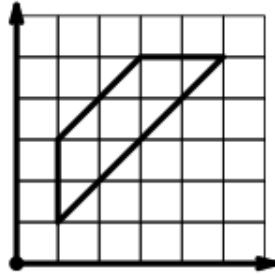


Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО)

11 класс, 2009 год

Задача 1. Найдите координаты центра и радиус окружности, описанной около четырёхугольника на рисунке, если сторона клетки равна 1.



$(4, 2); \sqrt{10}$

Задача 2. Докажите, что $6255^3 - 5995^3$ делится на 13.

Задача 3. Пролетая на драконе, Гарри Поттер увидел крысу Рона, бегущую в противоположную сторону. Пролетев ещё полминуты не меняя направления, Гарри спрыгнул с дракона и отправился в погоню. Известно, что скорость Гарри в 5 раз меньше скорости дракона. Во сколько раз скорость Гарри больше скорости крысы, если он догнал крысу через 4,5 минуты после их встречи?

В 3 раза

Задача 4. Дана трапеция с основаниями 1 и 4 и площадью S . Найдите площадь треугольника, образованного диагоналями и меньшим основанием трапеции.

$S/25$

Задача 5. Пусть $f(x) = \frac{x}{3} + 2$. Найдите значение функции

$$\underbrace{f(\dots f(f(x)) \dots)}_{2009}$$

в точке $x = 4$.

$3 + 3^{-2009}$

Задача 6. Третий, четвёртый, седьмой и последний члены непостоянной арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите число членов этой арифметической прогрессии.

16

Задача 7. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, а длины высот выражаются натуральными числами. Найдите стороны треугольника.

$2\sqrt{3}$

Задача 8. Найдите сумму всех корней уравнения

$$2 \cos 3x + 8 |\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$.

0

Задача 9. Тетраэдр с ребром 1 повернули на 90° относительно прямой, соединяющей середины противоположных рёбер. Найдите объём общей части нового и исходного тетраэдров.

$\frac{17}{24}$

Задача 10. Пусть x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Найдите все значения, которые может принимать функция $x^2 + y^2$.

$[\frac{17}{25}, 17]$