

Московская математическая олимпиада

8 класс, 2019 год

1. Все таверны в царстве принадлежат трем фирмам. В целях борьбы с монополиями царь Горох издал следующий указ: каждый день, если у некоторой фирмы оказывается более половины всех таверн и число её таверн делится на 5, то у этой фирмы остается только пятая часть её таверн, а остальные закрываются. Могло ли так случиться, что через три дня у всех фирм стало меньше таверн? (Новые таверны в это время открываться не могут.)
2. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого $n^2 + 20n + 19$ делится на 2019.
3. Про трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BD$. Пусть точка M — середина боковой стороны CD , а O — точка пересечения отрезков AC и BM . Докажите, что треугольник BOC — равнобедренный.
4. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.
5. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30^\circ$. Найдите угол AKB .
6. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n , — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?