

Московская математическая олимпиада

10 класс, 2018 год

1. Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр «2018»?
2. В клетчатом квадрате со стороной 2018 часть клеток покрашены в белый цвет, остальные — в чёрный. Известно, что из этого квадрата можно вырезать квадрат 10×10 , все клетки которого белые, и квадрат 10×10 , все клетки которого чёрные. При каком наименьшем d можно гарантировать, что из него можно вырезать квадрат 10×10 , в котором количество чёрных и белых клеток отличается не больше чем на d ?
3. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC , AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO . Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB .
4. Назовем расстановку n единиц и m нулей по кругу *хорошей*, если в ней можно поменять местами соседние нуль и единицу так, что получится расстановка, отличающаяся от исходной поворотом. При каких натуральных n, m существует хорошая расстановка?
5. Карлсон ест треугольный торт. Он режет торт по биссектрисе одного из углов, съедает одну из частей, а с другой повторяет ту же операцию. Если Карлсон съест больше половины торта, он станет не в меру упитанным мужчиной в самом расцвете сил. Докажите, что рано или поздно это произойдёт.
6. Докажите, что количество способов разрезать квадрат 999×999 на уголки из трёх клеток делится на 2^7 .