

# Московская математическая олимпиада

11 класс, 2015 год

## Первый день

1. Последовательность  $(a_n)$  такова, что  $a_n = n^2$  при  $1 \leq n \leq 5$  и при всех натуральных  $n$  выполнено равенство  $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$ . Найдите  $a_{2015}$ .

2. В прошлом году Миша купил смартфон, который стоил целое четырёхзначное число рублей. Зайдя в магазин в этом году, он заметил, что цена смартфона выросла на 20% и при этом состоит из тех же цифр, но в обратном порядке. Какую сумму Миша потратил на смартфон?

4545 рублей или 5454 рубля

3. На основании  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взяли произвольную точку  $X$ , а на боковых сторонах — точки  $P$  и  $Q$  так, что  $XPBQ$  — параллелограмм. Докажите, что точка  $Y$ , симметричная точке  $X$  относительно  $PQ$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

4. Единичный квадрат разрезан на  $n$  треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной  $1/n$ .

5. Докажите, что в таблице  $8 \times 8$  нельзя расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое по одному разу) так, чтобы в ней для любого квадрата  $2 \times 2$  вида

$a$	$b$
$c$	$d$

было выполнено равенство  $|ad - bc| = 1$ .

6. Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

Нет

## Второй день

1. Сумма нескольких не обязательно различных положительных чисел не превосходила 100. Каждое из них заменили на новое следующим образом: сначала прологарифмировали по основанию 10, затем округлили стандартным образом до ближайшего целого числа и, наконец, возвели 10 в найденную целую степень. Могло ли оказаться так, что сумма новых чисел превышает 300?

107

2. Какое наибольшее количество множителей вида  $\sin \frac{n\pi}{x}$  можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin \frac{\pi}{x} \sin \frac{2\pi}{x} \sin \frac{3\pi}{x} \dots \sin \frac{2015\pi}{x} = 0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

1001

3. У Ивана-царевича есть два сосуда ёмкостью по 1 л, один из которых полностью заполнен обычной водой, а в другом находится  $a$  л живой воды,  $0 < a < 1$ . Он может переливать только из сосуда в сосуд любой объём жидкости до любого уровня без переполнений и хочет за конечное число таких переливаний получить 40-процентный раствор живой воды в одном из сосудов. При каких значениях  $a$  Иван-царевич сможет это сделать? Считайте, что уровень жидкости в каждом из сосудов можно точно измерить в любой момент времени.

$\frac{3}{2} \neq v$  ирП

4. День в Анчурии может быть либо ясным, когда весь день солнце, либо дождливым, когда весь день льёт дождь. И если сегодня день не такой, как вчера, то анчурийцы говорят, что сегодня погода изменилась. Однажды анчурийские ученые установили, что 1 января день всегда ясный, а каждый следующий день в январе будет ясным, только если ровно год назад в этот день погода изменилась. В 2015 году январь в Анчурии был весьма разнообразным: то солнце, то дожди. В каком году погода в январе впервые будет меняться ровно так же, как в январе 2015 года?

2017

5. На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовем точку океана *особой*, если для неё найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

4