

## Московская математическая олимпиада

9 класс, 2013 год

1. На круглом столе через равные промежутки лежат пирожные. Игорь ходит вокруг стола и съедает каждое третье встреченное пирожное (каждое пирожное может быть встречено несколько раз). Когда на столе не осталось пирожных, он заметил, что последним взял пирожное, которое встретил первым, и прошел ровно 7 кругов вокруг стола. Сколько было пирожных?

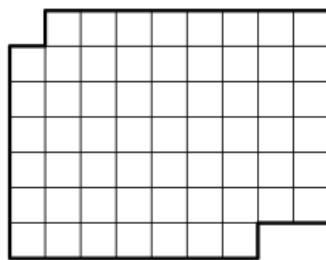
2. В треугольнике  $ABC$ , где угол  $B$  прямой, а угол  $A$  меньше угла  $C$ , проведена медиана  $BM$ . На стороне  $AC$  взята точка  $L$  так, что  $\angle ABM = \angle MBL$ . Описанная окружность треугольника  $BML$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $N$ . Докажите, что  $AN = BL$ .

3. Про положительные числа  $a, b, c, d, e$  известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся такие три, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две равные части.



5. Назовём точку на плоскости *узлом*, если обе её координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

6. Сто мудрецов хотят проехать на электричке из 12 вагонов от первой до 76-й станции. Они знают, что на первой станции в два вагона электрички сядут два контролёра. После четвертой станции на каждом перегоне один из контролёров будет переходить в соседний вагон, причем они ходят по очереди. Мудрец видит контролёра, только если он в соседнем вагоне или через вагон. На каждой станции каждый мудрец может перебежать по платформе не далее чем на три вагона (например, из 7-го вагона мудрец может добежать до любого вагона с номером от 4 до 10 и сесть в него). Какое максимальное число мудрецов сможет ни разу не оказаться в одном вагоне с контролёром, как бы контролёры ни перемещались? (Никакой информации о контролёрах, кроме указанной в задаче, мудрец не получает. Мудрецы договариваются о стратегии заранее.)