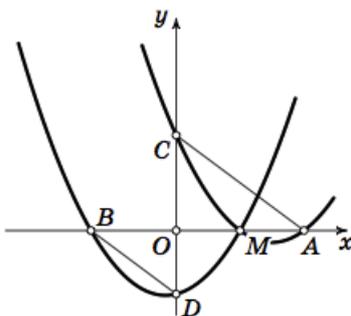


Московская математическая олимпиада

10 класс, 2013 год

1. Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M , а ось Oy — в точке C . График другого пересекает ось Ox в точках B и M , а ось Oy — в точке D . (Здесь O — начало координат; точки расположены как на рисунке.) Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.



2. На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку *отважной*, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — *отважным*, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

3. Дан правильный $4n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{4n}$ площади S , причём $n > 1$. Найдите площадь четырёхугольника $A_1A_nA_{n+1}A_{n+2}$.

4. В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитарных классов состоит из n человек, команда математических — из m , причём $n \neq m$. Так как стол для игры всего один, было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд начинают играть между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры человек, стоящий в очереди первым, заменяет за столом члена своей команды, который становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

5. Дана функция $f(x)$, значение которой при любом целом x целое. Известно, что для любого простого числа p существует такой многочлен $Q_p(x)$ степени, не превышающей 2013, с целыми коэффициентами, что $f(n) - Q_p(n)$ делится на p при любом целом n . Верно ли, что существует многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что $g(n) = f(n)$ для любого целого n ?

6. Пусть I — центр вписанной окружности неравностороннего треугольника ABC . Через A_1 обозначим середину дуги BC описанной окружности треугольника ABC , не содержащей точки A , а через A_2 — середину дуги BAC . Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую A_2I , пересекает прямую BC в точке A' . Аналогично определяются точки B' и C' .

а) Докажите, что точки A' , B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой OI , где O — центр описанной окружности треугольника ABC .