

Олимпиада «Ломоносов» по математике

8 класс, 2013 год

1. Решите ребус (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

$$MSU + MSU + MSU + MSU + OLYMP + OLYMP = MOSCOW.$$

2. а) Найдите количество натуральных делителей числа $N = 1 \underbrace{00 \dots 0}_{999}$, не являющихся точными квадратами (т. е. квадратами натуральных чисел); б) \dots не являющихся ни точными квадратами, ни точными кубами.

3. Блоха прыгает по числовой прямой, причём длина каждого прыжка не может быть меньше n . Она начинает своё движение из начала координат и хочет побывать во всех целых точках, принадлежащих отрезку $[0; 2013]$ (и только в них!) ровно по одному разу. При каком наибольшем значении n это у неё получится?

4. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - 2y + 1 = 0, \\ y^2 - 4z + 7 = 0, \\ z^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите количество девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры 1, 2, 3, 4, 5 расположены в порядке возрастания, а цифра 6 идёт сразу за цифрой 1 (например, 916238457).

6. Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1 , точка B — серединой AA_1 , точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1 . а) Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — тоже параллелограмм; б) Найдите его площадь, если известно, что $S(ABCD) = 1$.

7. Сколькими различными способами шахматный ферзь может пройти с поля $d1$ на поле $h8$, если ему разрешается ходить только вправо, вверх или по диагонали вправо вверх на любое число клеток?

Ответы

1. $143 + 143 + 143 + 143 + 97012 + 97012 = 194596$.

2. а) 750000; б) 666333.

3. 1006.

4. $(-1, 1, 2)$.

5. 504.

6. б) 5.

7. 39625.