

Олимпиада «Ломоносов» по математике

2009 год

1. На сколько одно из положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое равно $\sqrt{3}$?

9 вН

2. В свежих грибах содержание воды колеблется от 90% до 99%, а в сушёных — от 30% до 45%. В какое наибольшее количество раз при этих ограничениях может уменьшиться вес грибов в результате сушки?

02

3. При каждом значении a найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a.$$

Если $a > 1$, то $x = a - 1$ или $x = \frac{1}{a-1}$; если $a \leq 1$, то решений нет

4. Можно ли данный двугранный угол величиной 90° пересечь плоскостью так, чтобы в полученном сечении образовался угол величиной 110° ?

вГ

5. Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n , если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 4 раза?

2 или 6

6. Сколько решений на отрезке $[0; \pi]$ имеет уравнение

$$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|?$$

Одно решение

7. Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A , а третьей окружности — в точках B и C . Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D , продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E , а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найдите BG , если $BC = 5$ и $BF = 12$.

13

8. Настенные часы сломались, отчего минутная стрелка стала в произвольные моменты времени мгновенно менять направление своего движения на противоположное, вращаясь со своей прежней угловой скоростью. Все потенциальные показания (в минутах) этой стрелки целиком заполняют промежуток $[0; 60)$.

а) Может ли такая стрелка в течение одного часа бесконечно много раз показать каждое из двух чисел 15 и 45?

б) Какое наибольшее количество раз в течение трёх суток может встретиться самое редкое показание такой стрелки (из всех потенциальных показаний за эти трое суток)?

72 (9 '87' (8

9. Найдите все пары (x, y) , при каждой из которых для чисел

$$u = \sqrt{4 + x^3 - 9x} - x - 3^y \quad \text{и} \quad v = 2 - x - 3^y$$

справедливы все три следующих высказывания сразу:

- если $|u| > |v|$, то $u > 0$;
- если $|u| < |v|$, то $v < 0$;
- если $|u| = |v|$, то $v < 0 < u$.

$\mathbb{R} \ni n'(\infty+;g) \cap (0;g-) \ni x$