Олимпиада «Ломоносов» по математике

2006 год

1. Вычислите

$$\log_4 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}.$$

$\boxed{-19}$

2. Что больше: $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трёхчлена $11x^2 - 17x - 13$?

Корень трёхчлена больше

3. Решите уравнение

$$\cos\left(x^2 + x\right) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

$\boxed{\pm\sqrt{2\pi n},\ -1 \pm \sqrt{1 + 2\pi n},\ n = 0, 1, 2, \ldots}$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD = 9$ и $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

8 или 36

5. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришёл в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

$\boxed{\frac{3}{5}}$

6. Решите неравенство

$$\sqrt{4 - x} - 2 \leqslant x|x - 3| + 4x.$$

$\boxed{[0; 4]}$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x - 2a\sin x - |2a - 1| + 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

$\boxed{(-\infty; -2] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[0; \frac{1}{2}\right] \cup \{2\}}$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n есть центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

$\boxed{2}$

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

$\boxed{(1, 117) \text{ или } (3, 59)}$

10. Решите неравенство

$$4(1 - \operatorname{tg} x)^{2004} + (1 + \operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

$\boxed{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}}$