

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2013 год

1. Фермер вырастил свёклы меньше, чем моркови, на 50%, а свёклы и моркови суммарно вырастил меньше, чем картофеля, на 40%. На сколько процентов он вырастил меньше моркови, чем картофеля?

2. Решить уравнение $\sqrt{6} \sin x + \sqrt{2} |\cos x| = 2$.

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2+3x+2}(x-5)^2 \cdot \log_{-x^2+4x+5}(4-x)^3 \leq 0.$$

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O , на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 1$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 1 : 2$. Найти площадь треугольника COD , если $AD = 5$, $BC = 2$, $KM = 7/3$, а $\cos \angle CAD = 1/3$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1; +\infty)$ удовлетворяет уравнению

$$f\left(\frac{2^y + 2^{-y}}{2}\right) = y$$

для любого $y \leq 0$. Для каждого значения $b \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{3b}{x+b}\right) \geq -2$.

6. В коробке у Вани лежат 32 новогодних шара, которыми Ваня начинает украшать ёлку. Каждый шар он сначала в течение 15 секунд выбирает в коробке, а затем в течение 20 секунд вешает на ёлку. Две его младших сестры Аня и Таня незаметно снимают шары с ёлки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Ваня начинает искать в коробке очередной шар, одна из сестёр (но не обе) может снять с ёлки один шар (на это ей требуется ровно 15 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Ани уходит одна минута и 45 секунд, после чего она готова украсть с ёлки следующий шар, а Таня прячет шар за три минуты и 45 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на ёлке в тот момент, когда Ваня повесит свой последний шар?

7. Три черепахи одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трём концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 2$ м для первой, $R_2 = 3$ м для второй и $R_3 = 9$ м для третьей черепахи. В начальный момент времени черепахи находятся на одном луче с вершиной в точке O . Все черепахи двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причём скорость третьей черепахи в шесть раз больше скорости второй и относится к скорости первой черепахи как 9 : 4. Черепахи продолжают своё движение до тех пор, пока не закончит свой круг последняя из них (та, что потратит на обход своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O ?

8. В пирамиде $SABC$ $AB = BC$, $SB = SN$, где N — середина отрезка AC , а тангенс угла между плоскостями SAB и ABC относится к тангенсу угла между плоскостями SBC и ABC как 5 : 2. Плоскость π параллельна BC , делит ребро SA в отношении 1 : 2, считая от вершины S , и проходит через основание O высоты SO пирамиды $SABC$. Найти отношение объёмов многогранников, на которые эта плоскость делит пирамиду $SABC$.

Ответы

1. На 60%.

2. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. $\left(2 - 2\sqrt{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup [3; 4)$.

4. $\frac{20\sqrt{2}}{27}$.

5. Если $b > 0$, то $x \in \left[\frac{7b}{17}; 2b\right]$; если $b < 0$, то $x \in \left[2b; \frac{7b}{17}\right]$.

6. 19.

7. 2 раза.

8. 27 : 71 или 1 : 53.