

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10–11 классы, 2011 год

1. Два поезда, содержавшие по 16 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 24 с после встречи их первых вагонов пассажир Миша, сидя в купе второго вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Игорем, а ещё через 40 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счёту вагоне ехал Игорь?

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + x \geq 0, \\ \sqrt{x} - 2 \leq y \leq 2 - x^2. \end{cases}$$

3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 16 и боковым ребром 15?

4. Решите неравенство

$$\log_3 3x^2 < \log_3 \left(3 + \frac{4}{x} \right) \cdot \log_3 (3x^2 + 4x).$$

5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K . Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L , делящей хорду в отношении $AL : BL = 2 : 3$. Найдите AK , если $BK = 12$.

6. При каких значениях a , b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx$$

состоит в точности из чисел -1 и 1 ?

7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 8 коробок так, чтобы в любых 5 коробках нашлись карандаши любого из 24 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

8. Функция $y = f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\cos x) = 0$ на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ равна 17π , а сумма корней уравнения $f(\sin x) = 0$ на отрезке $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ равна 29π . Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$?

Ответы

1. В 11-м.

2. 3.

3. $8\sqrt{2}$.

4. $\left(-\frac{2+\sqrt{5}}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{2+\sqrt{5}}{3}; +\infty\right)$.

5. 8.

6. $a = -6, b = 4, c = 1$.

7. 12.

8. 43π .