

Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2018 год

1. Приведите пример натурального числа n , которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

2. Квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + \frac{x}{2} + b$ и $Q(x) = x^2 + cx + d$ с вещественными коэффициентами таковы, что $P(x)Q(x) = Q(P(x))$ для всех x . Найдите все вещественные корни уравнения $P(Q(x)) = 0$.

 $\frac{5}{1} ; 1 -$

3. Существует ли набор чисел x_1, x_2, \dots, x_{99} такой, что каждое из них равно $\sqrt{2} + 1$ или $\sqrt{2} - 1$ и выполняется равенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

4. Натуральные числа $1, 2, \dots, 64$ записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \dots, 63$ числа k и $k + 1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка I_A — центр вневписанной со стороны BC окружности треугольника ABC , а точки K и L — середины отрезков DI_A и EI_A соответственно. Прямые BK и CL пересекаются в точке F , лежащей внутри угла BAC . Найдите $\angle BFC$, если $\angle BAC = 50^\circ$. (Вневписанная окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно.)

 $\circ 0 \text{E} 1$