

Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2016 год

1. Известна сумма четвёртой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

Нет

2. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух неоднозначных палиндромов.

3. Дан треугольник ABC . Из точки P внутри него опущены перпендикуляры PA' , PB' , PC' на стороны BC , CA , AB соответственно. Затем из точки P опущены перпендикуляры PA'' , PB'' на стороны $B'C'$ и $C'A'$ соответственно. Докажите, что $PA \cdot PA' \cdot PA'' = PB \cdot PB' \cdot PB''$.

4. Через точку с координатами $(10, 9)$ проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 10° . Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 101 - x$.

198

5. Есть 64 шашки нескольких цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двухклеточном прямоугольнике были разных цветов.