

Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2015 год

1. Ученику дано число x : это обыкновенная дробь со знаменателем 9. Ученик вычислил три новых числа $2x$, $4x$ и $5x$, каждое из этих трёх чисел округлил до ближайшего целого и результаты округлений сложил. Получилось 111. Найдите x . (Число округляется в меньшую сторону, если его дробная часть меньше $1/2$, и в большую, если дробная часть больше либо равна $1/2$.)

$\frac{6}{16}$

2. $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$. Докажите, что при любом $a > 0$ многочлен $af + g$ имеет не менее трёх различных корней.

3. Митя сложил все нечётные натуральные делители некоторого чётного числа N (включая единицу), а Ваня сложил все чётные натуральные делители числа N (включая само число). Затем Ванину сумму умножили на Митину. Может ли произведение быть квадратом натурального числа?

Нет

4. На медиане CM треугольника ABC выбрана такая точка D , что $2CD = AB$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E . Докажите, что если $DE = CE$, то угол BMC равен 120° .

5. Вначале на каждой клетке доски 100×100 стоит по одной шашке — они считаются столбиками из одной шашки (а в процессе игры будут образовываться столбики и из нескольких шашек). За один ход разрешается переставить любой столбик ходом ладьи: по вертикали или горизонтали *на столько клеток, сколько в нем шашек* (то есть, столбик из одной шашки ходит на соседнюю клетку, из двух шашек — прыгает через клетку и т. п.). Если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Можно ли за 9999 ходов собрать все шашки на одной клетке?

Нет
