

## Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2014 год

1. Решите уравнение  $[x] \cdot \{x\} = x^2$ . Здесь  $[x]$  — целая часть,  $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ .

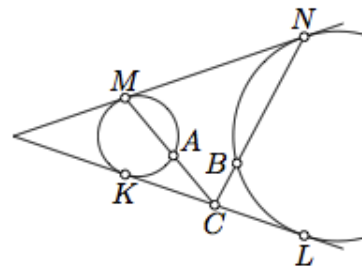
0

2. Разделите равнобедренный прямоугольный треугольник на два меньших треугольника так, чтобы какая-то медиана одного из этих треугольников была параллельна одной из высот второго треугольника.

3. На клетчатой доске  $(2k + 1) \times (2k + 1)$  расставили  $n$  белых и  $n$  черных ладей так, что ладьи разных цветов не бьют друг друга. При каком наибольшем  $n$  такое возможно?

$y + z^y = u \text{ и } \Pi$

4. В угол вписаны две непересекающиеся окружности. Одной стороны угла они касаются в точках  $K$  и  $L$ , другой — в точках  $M$  и  $N$  (см. рисунок),  $C$  — середина отрезка  $KL$ ,  $A$  и  $B$  — точки пересечения отрезков  $CM$  и  $CN$  с окружностями. Докажите, что



- а) точки  $A, B, M$  и  $N$  лежат на одной окружности;
- б) точки  $A, B, K$  и  $L$  лежат на одной окружности.

5. Пусть  $x, y, \frac{x+5}{y} + \frac{y+5}{x}$  и  $\frac{x^2+5}{y} + \frac{y^2+5}{x}$  — целые числа. Докажите, что тогда и число  $\frac{x^5+5}{y} + \frac{y^5+5}{x}$  — целое.

6. На квадратной пластинке со стороной 1 см сидит вирус-невидимка Вася. Он и доктор Петя ходят по очереди. Очередным  $n$ -м ходом Петя рисует вакциной как чернилами отрезок длиной 1 микрон, а затем Вася должен выбрать направление и проползти в этом направлении *по прямой* расстояние  $1/n$  микрона (не выходя за край пластинки). Если Вася проползёт через любую из точек с вакциной или коснётся её, он погибнет. Петя может действовать с любой точностью. Может ли он за конечное число ходов наверняка погубить вирус?

еП