

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2012/13 год

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 2x - 6 = 0$. Найдите $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.
2. Найдите наибольшее значение выражения $4b(5a - b) - (5a - 2)(5a + 2)$.
3. Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0$.
4. Трое ребят принялись красить лист ватмана, каждый — в свой цвет. Один закрасил красным 75% листа, второй закрасил зелёным 70% листа, а третий закрасил синим 65% листа. Сколько процентов листа будет заведомо покрашено всеми тремя цветами?
5. Прогулочный теплоход вышел в 10:00 вниз по течению реки из пункта A в пункт B . Прибыв в пункт B , он там простоял три часа и отправился обратно в пункт A , прибыв туда в 22:00. Найдите собственную скорость теплохода (в км/ч), если скорость течения равна 1,5 км/ч, а расстояние между пунктами A и B равно 32,4 км.
6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 1 = 0$. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1/x_2^2 и x_2/x_1^2 . Найдите p .
7. Найдите количество целых значений параметра p , при которых график функции

$$y = x^2 + px + p^2 + 2p - 3$$

пересекает ось X в точках с абсциссами разных знаков.

8. Заряда аккумулятора мобильного телефона Маши хватает на 8 часов разговора или на 48 часов в режиме ожидания. Когда Маша села в поезд, аккумулятор был заряжен, а когда Маша вышла из поезда, телефон полностью разрядился. Сколько часов длилась поездка, если известно, что Маша говорила по телефону 20% этого времени?
9. Два лыжника идут друг за другом с постоянной скоростью 6 км/ч, расстояние между ними равно 200 м. Лыжники поднялись на гору, спустились с неё и попали в рыхлый снег, где их скорость стала равна 3 км/ч. Какое расстояние (в метрах) теперь будет между ними?
10. Даны положительные рациональные числа a , b и c . Известно, что число b больше числа a на k , а число c больше числа b на 69; при этом число b больше числа a на 69%, а число c больше числа b на $k\%$. Чему равно c ?
11. Найдите две последние цифры числа 7^{1111} .
12. Сколько пар натуральных чисел (x, y) удовлетворяют равенству

$$\text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 2011 ?$$

13. На Новый год Дед Мороз раздавал конфеты в детском саду. На праздник пришли 28 мальчиков и 35 девочек. Каждый мальчик получил одинаковое количество конфет, и каждая девочка получила одинаковое количество конфет. Оказалось, что существует единственный способ раздать конфеты подобным образом. Какое максимальное количество конфет могло быть у Деда Мороза?

14. В треугольнике ABC известно, что $AB > AC$ и $\angle A = 40^\circ$. На стороне AB взяли точку D так, что $BD = AC$. Точка M — середина стороны BC , точка N — середина отрезка AD . Найдите угол BNM .
15. Отрезок BD — медиана равнобедренного треугольника ABC . Окружность радиуса 4 проходит через точки A , B и D и пересекает сторону BC в точке E такой, что $BE : BC = 7 : 8$. Найдите периметр треугольника ABC .
16. Вершины 1000-угольника последовательно занумеровали числами от 1 до 1000 и принялись закрасивать каждую 15-ю вершину: сначала первую, потом 16-ю, потом 31-ю и так далее. Процесс продолжается до тех пор, пока можно закрасивать новые вершины. Сколько вершин останутся в итоге незакрашенными?
17. В озере плавает груша массой 500 г, причём $1/5$ часть её находится над водой. Сверху грушу принимается клевать воробей со скоростью 120 г/мин, а снизу её одновременно начинает поедать карась со скоростью 180 г/мин. В итоге они съедают всю грушу. Сколько грамм груши съест карась?
18. В большую коробку положили 10 коробок поменьше. В некоторые из них положили 10 коробок ещё поменьше. В некоторые из этих последних коробок положили 10 коробок ещё меньшего размера и так далее. В результате оказалось, что имеется ровно 2000 коробок, в которых что-то лежит. Какое наибольшее число коробок могут при этом быть пустыми?
19. Имеется желоб, по которому в обе стороны могут кататься одинаковые шарики с фиксированной скоростью. Если два шарика соударяются, каждый из них меняет направление своего движения на противоположное. С одного конца желоба двигаются пять шариков на равных расстояниях друг от друга, с другого конца — семь шариков (тоже на равных расстояниях друг от друга). Сколько всего будет соударений?
20. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна 10, а меньшее основание BC равно 5. Биссектриса угла A перпендикулярна отрезку CD , пересекает его в точке K и пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке F . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $EF = 4$.

Отвѣты

1. -12.

2. 4.

3. -5.

4. 10.

5. 7,5.

6. -150,5.

7. 3.

8. 24.

9. 100.

10. 199.

11. 43.

12. 16.

13. 280.

14. 20°.

15. 20.

16. 800.

17. 300.

18. 18001.

19. 35.

20. 96.