

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2010/11 год

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса мёда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов мёда. За следующий час Винни-Пух съел 80% оставшегося мёда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов мёда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 граммов мёда. Сколько килограммов мёда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

2. Стрелок сделал 30 выстрелов в мишень. За первое попадание ему начислили 13 баллов, а за каждое следующее попадание начисляли на 0,9 баллов больше, чем за предыдущее. Сколько раз промахнулся стрелок, если он набрал 215,4 балла?

3. Найдите положительное число p , такое, что прямая $y = 4x + p$ и координатные оси образуют треугольник, площадь которого равна 72.

4. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. После их встречи первый прибывает в пункт B через 16 минут, а второй прибывает в пункт A через 25 минут. Сколько минут прошло от начала движения велосипедистов до их встречи?

5. Найдите последнюю цифру числа $2^{2^{129}}$.

6. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab}$$

при $a = 1,67$, $b = 1,71$ и $c = 0,46$.

8. В колбе было 230 граммов 60%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в неё столько же воды, чтобы получить 48%-й раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

9. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти её членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

10. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Известно, что $BC = 16$, $CA = 55$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB .

11. Найдите x и y , такие, что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

12. Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 240 километров. Если первый выедет на 4,5 часа раньше второго, то он встретит второго велосипедиста через 7,5 часа после своего выезда. Если второй выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого велосипедиста через 6 часов после своего выезда. С какой скоростью (в км/ч) едет каждый велосипедист?

13. При каком натуральном значении n числа n , $n + 15$, $46n - 30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?
14. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?
15. Хорды AB и CD пересекаются в точке X . M — точка пересечения биссектрисы угла BXD с хордой BD . Найдите отрезок BM , если $BD = 27$, а площади треугольников CXB и AXD относятся как $25 : 16$.
16. Целые числа m и n таковы, что $4m + 5n = mn - 9$. Найдите, какое наибольшее значение может принимать m .
17. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких, что точка $(14; 22)$ содержится внутри (но не границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты — натуральны и меньше, чем 31.
18. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = 50$, $BC = 21$ и $\cos \angle BAD = 3/5$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и $B CD$.
19. Прямоугольник 57×34 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадратики. На сколько частей в итоге разобьётся прямоугольник, если в нём провести ещё и две диагонали?
20. 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

Ответы

1. 8.
2. 18.
3. 24.
4. 20.
5. 2.
6. 15355.
7. 20.
8. 46.
9. 20.
10. 49.
11. $x = -1,5, y = 0,25$.
12. 24; 20.
13. 3.
14. 1200; 2970.
15. 15.
16. 34.
17. 30576.
18. 30,75.
19. 2118.
20. 8855.