

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2018 год, вариант 2

1. Даны 6000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 6000 (на каждой карточке написано ровно одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

179940

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 20g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = \frac{f(x)}{A}$.

 $\frac{20}{1} = A$

3. Уравнение $x^2 + ax + 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^3 - \frac{39}{x_2} = x_2^3 - \frac{39}{x_1}.$$

Найдите все возможные значения a .

4 = a

4. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т. е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют два *различных* корня, являющихся степенями числа 3 с *натуральными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{45} .

4489

5. Окружность с центром O , вписанная в треугольник PQR , касается его сторон PQ , QR и RP в точках C , A и B соответственно. Прямые BO и CO пересекают стороны PQ и PR в точках K и L соответственно. Найдите отношение $QA : AR$, если $KQ = 3$, $QR = 16$, $LR = 1$.

9 : 7

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тринадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 260, а сумма расстояний от этих же тринадцати чисел до числа a^2 равна 1768. Найдите все возможные значения a .

 $13 = a$ или $12 = a$

7. В окружность вписан четырёхугольник $KLMN$ с диагоналями KM и LN , которые пересекаются в точке T . Основания перпендикуляров, опущенных из точки T на стороны четырёхугольника, лежат на этих сторонах. Расстояния от точки T до сторон KL , LM , MN , NK равны $4\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{17}}$ и $\frac{8}{\sqrt{17}}$ соответственно.

а) Найдите отношение $KT : TM$.

б) Найдите длину диагонали LN , если дополнительно известно, что $KM = 10$.

$\frac{KT}{TM} = 4:1$ (а)