

## Олимпиада «Физтех» по математике

### 11 класс, 2018 год, вариант 1

1. Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых одно из трёх данных чисел

$$\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21), \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x^2 - 7} \quad \text{и} \quad \log_{x^2} \frac{x^2}{x^2 - 3}$$

равно сумме двух остальных.

8 = x

2. Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции  $(g(x))^2 + 5f(x)$ , если наименьшее значение функции  $(f(x))^2 + 5g(x)$  равно  $-17$ .

$\frac{2}{6}$

3. На каждой из прямых  $y = 1$  и  $y = 12$  отмечено по 200 точек с абсциссами  $1, 2, 3, \dots, 200$ . Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

89708

4. Числа  $x$  и  $y$  таковы, что выполняются равенства

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2 \quad \text{и} \quad 5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y.$$

Найдите  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ .

$\frac{5}{9}$

5. Окружность  $\Omega$  радиуса  $\sqrt{3}$  касается сторон  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно и пересекает сторону  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  ( $M$  лежит между  $A$  и  $N$ ) так, что отрезок  $MK$  параллелен  $AC$ ,  $KC = 1$ ,  $AL = 6$ . Найдите  $\angle ACB$ , длины отрезков  $MK$ ,  $AB$  и площадь треугольника  $CMN$ .

$$\angle ACB = 120^\circ, MK = 3, AB = 7\sqrt{21}, S_{CMN} = \frac{4}{3}$$

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа  $a$  равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа  $b$  равна 374. Найдите все возможные значения  $a$ , если известно, что  $a + b = 98$ .

$a \in \{-9, 25, 107\}$

7. Ребро  $A_1A$  параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  перпендикулярно его грани  $ABCD$ . Сфера  $\Omega$  касается рёбер  $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$ , и при этом касается ребра  $CD$  в такой точке  $K$ , что  $CK = 4, KD = 1$ .

а) Найдите длину ребра  $A_1A$ .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера  $\Omega$  касается ребра  $A_1D_1$ . Найдите объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  и радиус сферы  $\Omega$ .

$A_1A = 8; V = 256; R = 2\sqrt{5}$
------------------------------------