

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2018 год, вариант 1

1. Каких целых чисел от 1 до $8 \cdot 10^{20}$ (включительно) больше и на сколько: содержащих в своей записи только чётные цифры или содержащих в своей записи только нечётные цифры?

$$\boxed{(1 - 025) \frac{1}{5} \text{ ил } 10^{20}}$$

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 2g(x)$ равно 5.

$$\boxed{2}$$

3. Уравнение $x^2 + ax + 5 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 ; при этом

$$x_1^2 + \frac{250}{19x_2^3} = x_2^2 + \frac{250}{19x_1^3}.$$

Найдите все возможные значения a .

$$\boxed{01 = a}$$

4. На каждой из прямых $x = 0$ и $x = 2$ отмечено по 62 точки с ординатами $1, 2, 3, \dots, 62$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 124 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

$$\boxed{8062}$$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD , и в каждый из полученных треугольников ABD и BCD вписана окружность. Прямая, проходящая через вершину B и центр одной из окружностей, пересекает сторону DA в точке M . При этом $AM = \frac{8}{5}$ и $MD = \frac{12}{5}$. Аналогично, прямая, проходящая через вершину D и центр второй окружности, пересекает сторону BC в точке N . При этом $BN = \frac{30}{11}$ и $NC = \frac{25}{11}$.

а) Найдите отношение $AB : CD$.

б) Найдите длины сторон AB и CD , если дополнительно известно, что данные окружности касаются друг друга.

$$\boxed{\text{а) } 4 : 5; \text{ б) } AB = 4, CD = 5}$$

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 294, а сумма расстояний от этих же девяти чисел до некоторого числа b равна 1932. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 256$.

$$\boxed{\frac{8}{557} = a \text{ или } \frac{8}{11} = a}$$

7. В треугольнике ABC сторона AC равна 6, а угол ACB равен 120° . Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC . Найдите длины отрезков CL , MK , AB и площадь треугольника ANL .

$CL = 1, MK = 3, AB = 3\sqrt{13}, S_{ANL} = \frac{29}{12\sqrt{3}}$
--