

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 10 класс, 2017 год, вариант 1

1. Когда к квадратному трёхчлену  $f(x)$  прибавили  $x^2$ , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли  $x^2$ , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение  $f(x)$ , если к нему прибавить  $2x^2$ ?

Увеличится на 3

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

[3; 35] ∪ (120; +∞)

3. На сторонах треугольника  $ABC$  отметили точки: 10 — на стороне  $AB$ , 11 — на стороне  $BC$ , 12 — на стороне  $AC$ . При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4951

4. Продолжение высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную около него окружность в точке  $D$  (точки  $B$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AC$ ). Градусные меры дуг  $AD$  и  $CD$ , не содержащих точки  $B$ , равны  $60^\circ$  и  $90^\circ$  соответственно. Определите, в каком отношении отрезок  $BD$  делится стороной  $AC$ .

1 : 3

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке  $(50, 30)$ . Найдите количество таких квадратов.

036

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру  $\Phi$ , координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2(x - y), \\ x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1). \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры  $\Phi$  и расстояние от точки  $T(0, 4)$  до ближайшей точки фигуры  $\Phi$ .

(6)  $2\pi - 2\sqrt{2}$

7. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ ;  $MD$  и  $ME$  — биссектрисы треугольников  $AMB$  и  $CMB$  соответственно. Отрезки  $BM$  и  $DE$  пересекаются в точке  $P$ , причём  $BP = 2$ ,  $MP = 4$ .

а) Найдите отрезок  $DE$ .

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника  $ADEC$  можно описать окружность. Найдите её радиус.

а)  $2\sqrt{85}$