

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2016 год, вариант 2

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты x , y и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 20x + 63$.

20

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q — соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 8x^2 + 8x = 1$.

47

3. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

1728

4. Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0, \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

 $\frac{3}{20} + \pi$

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

 $\left(\frac{3}{13\sqrt{4}}, \frac{12}{13\sqrt{4}}\right); \left(\frac{3}{1}, \frac{3}{1}\right)$

6. Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP , если $BF = \sqrt{15}$.

2^{√33}