

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2016 год, вариант 3

1. Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3 + 5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3 + 18x}.$$

$$\{\mathbb{Z}\} \cap [1; 0] \cap \left(\frac{\pi}{6}; +\infty\right)$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\sin 4x + \sin 2x} = 2|\sin 2x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u \neq \pi + \left(\frac{\pi}{1-\sqrt{17}}\right) \cos \pi a -$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

$$\{-4, -1\}$$

4. В треугольнике ABC медианы BD и CE пересекаются в точке M . Окружность, построенная на отрезке BM как на диаметре, проходит через вершину C и касается прямой DE . Известно, что $CM = 4$. Найдите высоту AH треугольника ABC , угол CBD и площадь треугольника ABC .

$$12; 30^\circ; 24\sqrt{3}$$

5. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

$$2592$$

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

$$2\pi; 6\pi - 3\pi; 2\pi$$

7. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12. Сфера Ω радиуса $\sqrt{35/3}$ касается всех боковых граней призмы. На отрезках AA_1 и BB_1 выбраны соответственно точки K и L такие, что $KL \parallel AB$, а плоскости KBC и LA_1C_1 касаются сферы Ω . Найдите объём призмы и длину отрезка AK .

$$V = 420\sqrt{3}; AK = 8 \text{ или } AK = 4$$