

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2016 год, вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{2 \cos 3x}{\cos x} = 5|\sin x|.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u + \frac{1}{1} \text{ uiscst } \mp$$

2. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

$$\left(\frac{99\sqrt{4}}{4}, \frac{99\sqrt{4}}{4}\right); \left(\frac{8}{1}, \frac{8}{1}\right)$$

3. Решите неравенство

$$5^{\frac{x+5}{x+4}} \cdot 3^{x+4} \geq 75.$$

$$(\infty + ; \mp - \text{ g } \text{e} \text{80}] \cap [\text{g} - ; \mp -)$$

4. Окружность ω радиуса 4 с центром O вписана в остроугольный треугольник EFQ и касается его сторон FQ и EQ в точках M и P соответственно. Окружность Ω радиуса $\sqrt{65}/2$ с центром T описана около треугольника PQM .

а) Найдите OQ .

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площади треугольника FTE к площади треугольника EFQ равно $2/3$. Найдите длину биссектрисы QA треугольника EFQ , а также его площадь.

$$\mp 8 = S; \frac{7}{99\sqrt{8}} = \sqrt{A} \text{ (0; } \frac{99}{\sqrt{8}} \wedge \text{ (e)$$

5. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

$$0912$$

6. Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

$\frac{1}{3}; -6, -3$

7. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Сфера с диаметром AC пересекает рёбра AB и BC соответственно в точках F и N , отличных от вершин призмы. Отрезки C_1F и A_1N пересекаются в точке P , и при этом $A_1N = 7$, $C_1P = 6$.

а) Найдите угол PFA .

б) Найдите отношение $AF : FB$.

в) Пусть дополнительно известно, что $AB = 6$. Найдите объём призмы.

$\frac{1}{10} \sqrt{10}$
