

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2016 год, вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \geq 1.$$

$$\left(\infty; \frac{9}{2} \right) \cap \left(\frac{9}{21}; \frac{9}{2} \right] \cap \left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2} \right]$$

2. Решите уравнение

$$(\cos 2x - 2 \cos 4x)^2 = 9 + \cos^2 5x.$$

$$\mathbb{Z} \in \pi \left(\frac{2}{\pi} \right)$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$$

$$\left(-24, \frac{3}{4} \right); \left(-\frac{3}{4}, 12 \right)$$

4. Точки A, B, C, D, E последовательно расположены на прямой, причём $AB = BC = DE = 2$, $CD = 1$. Окружности Ω и ω , касающиеся друг друга, таковы, что Ω проходит через точки D и E , а ω проходит через точки B и C . Найдите радиусы окружностей Ω и ω , если известно, что их центры и точка A лежат на одной прямой.

$$R = \frac{6\sqrt{19}}{11}, r = \frac{6\sqrt{19}}{8}$$

5. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

$$3645$$

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-4| + |x+12| - 3)(x^2 + y^2 - 12) = 0, \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$16; 53 + 4\sqrt{123}$$

