

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, 2015 год, вариант 3

1. Известно, что $\sin 2x = 2 \cos y - \frac{5}{2} \sin y$, $\cos x = 2 \sin y - \frac{5}{2} \cos y$. Найдите $\sin 2y$.

07
28

2. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

0028

3. Решите систему

$$\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$$

(1'9)

4. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$[\frac{7}{1} + 2^{\wedge}2 : \infty -)$

5. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

072

6. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1 , K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$ и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK .

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3 . Найдите угол CAB , если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3 .

$(\text{a}) \frac{5}{32} (9) 2 \arcsin \frac{5}{8} = \arccos \frac{7}{25}$