

## Олимпиада «Физтех» по математике

2010 год, вариант 2

1. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(\sqrt{x+3} + 1) \leq 1.$$

$$(\infty+; 1] \cap (1-; 2-)$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2} - \sqrt{25-y^2} = 1, \\ \sqrt{25-x^2} + \sqrt{25-y^2} = y^2 - 2x^2 + 2x + 3. \end{cases}$$

$$\left( \sqrt{9}, \sqrt{2}, -1, -1 \right), \left( \sqrt{9}, \sqrt{4}, 2, -1 \right), \left( 3, -4 \right), \left( 3, -4 \right)$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x + 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi$$

4. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна  $\sqrt{2}$ , высота  $SO$  равна 2. Точка  $K$  лежит на высоте  $SO$ , причём  $KS : KO = 1 : 3$ . Через точку  $K$  проведена плоскость  $\Pi$ , перпендикулярная прямой  $SA$ . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью  $\Pi$ , расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\Pi$  и угол между плоскостью  $\Pi$  и прямой  $SD$ .

$$\frac{3}{4} \sin \alpha, \frac{3}{3} \sqrt{\frac{3}{1}}; \frac{3}{1} \sqrt{\frac{3}{1}}$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{2} \cos y = \frac{3}{2}, \\ \sqrt{2} \sin y + \sqrt{3} \cos x = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}, u\pi + \frac{\pi}{2}$$

6. В трапецию  $ABCD$  можно вписать окружность. Длины её боковых сторон  $AB$  и  $CD$  равны соответственно 3 и 5, а длина основания  $AD$  больше длины  $BC$ . Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно  $5/11$ . Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

$$\frac{3}{92} \sqrt{2} = AD, \frac{3}{10} \sqrt{2} = AC, \frac{3}{14} = R$$