

Олимпиада «Физтех» по математике

2009 год, вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{2x+1}(4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 4) = 2, \\ \log_{y+2}(y^2 + 6y - x + 14) = 2. \end{cases}$$

(24, 7)

2. Решите неравенство

$$\left| 2^{\sqrt{x-1}-1} - 1 \right| + \frac{5}{3} \leq \frac{2^{\sqrt{x-1}+3}}{3} - 4^{\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}}.$$

[5; 1]

3. Найдите решения уравнения

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8 \sin x \sin 3x,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x \geq 0$.

[0, 1, 2, 3] ∪ [π, 2π] ∪ [3π, 4π] ∪ [5π, 6π] ∪ [7π, 8π] ∪ [9π, 10π]

4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках $A_1 B, B_1 C, C_1 D$ соответственно так, что

$$\frac{A_1 K}{KB} = \frac{B_1 L}{LC} = \frac{C_1 M}{MD} = 3.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых $A_1 B, B_1 C, C_1 D$ в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM , расстояние от центра сферы до плоскости KLM и объём призмы.

[9; 2√3; 2√3]

5. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O , а их длины равны соответственно 30, 24 и 18. Найдите площади треугольников ABC и $OA_1 C$, а также радиус окружности, описанной около треугольника $OA_1 C$.

[288, 48, 25/4]

6. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 31 \leq 8(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

[-1; 1] ∪ [4; 11]

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2x + 4y - 3z, \\ y^2 - z^2 = x - 3y + 4z, \\ z^2 - x^2 = -3x + y - 5z. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{9}{2x^2+1} & \frac{x}{2x^2+1} & \frac{9}{2x^2+1} \\ \frac{9}{2x^2-1} & \frac{x}{2x^2-1} & \frac{9}{2x^2-1} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$