

## Олимпиада «Физтех» по математике

2007 год

1. Решите уравнение

$$2 \log_3(x^2 - 4) + 3\sqrt{\log_3(x + 2)^2} - \log_3(x - 2)^2 = 4.$$

$\boxed{\frac{1}{3}}$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 9x - 2 \cos 6x + 1}{\cos 3x - 1} = |\cos 3x|.$$

$\boxed{\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{2u} + \frac{\pi}{u}}$

3. Решите неравенство

$$\frac{(\sqrt{x+3} + x - 3)(\sqrt{4x+5} + x - 4)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}} \leq 0.$$

$\boxed{1}$

4. Окружность  $\omega$  с центром  $O$  на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Известно, что  $AD = 2CE$ , а угол  $DOE$  равен  $\operatorname{arccotg} \frac{1}{3}$ . Найти углы треугольника  $ABC$  и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью  $\omega$ .

$\boxed{\angle ABC = \frac{\pi}{2}, \angle BAC = \frac{\pi}{3}, \angle ACB = \frac{\pi}{6}; \frac{S_{ABC}}{S_{\omega}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$

5. Найти все значения параметра  $a$ , при которых существует ровно две пары действительных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2. \end{cases}$$

$\boxed{\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\} \cap \left[ \frac{9\sqrt{2}}{16}, \frac{9\sqrt{2}}{4} \right]}$

6. Внутри прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  расположены два шара  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , касающиеся друг друга внешним образом; кроме того, шар  $\omega_1$  касается граней  $ABCD$ ,  $ABB_1 A_1$ ,  $ADD_1 A_1$ , а шар  $\omega_2$  касается граней  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $BCC_1 B_1$ ,  $CDD_1 C_1$ . Известно, что  $AB = 6 - \sqrt{2}$ ,  $A_1 D_1 = 6 + \sqrt{2}$ ,  $CC_1 = 6$ . Найти расстояние между центрами шаров  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Найти наибольший и наименьший суммарный объём шаров.

$\boxed{d = 4; V_{\max} = \frac{136}{9}\pi, V_{\min} = \frac{64}{9}\pi}$